Courbure locale des rayons lumineux dans l'atmosphère

P. Bénard

file : courbloc.tex

19 Janvier 2006

Résumé

Dans cette note, on examine l'expression de la courbure locale des rayons lumineux se propageant dans l'atmosphère. Le fait de ne s'intéresser qu'à la courbure locale autorise à examiner le trajet d'un très court tronçon de rayon lumineux, et donc à restreindre le calcul aux termes dominants, ce qui simplifie énormément les calculs. En conséquence, le gradient de l'indice de réfraction est décrit par son terme dominant, c'est à dire que ce gradient est pris constant dans le petit espace considéré.
Le but de cette note est essentiellement de démontrer que pour un rayon donné et en en point donné, la courbure est maximale lorsque ce rayon est proche de l'horizontale.

1 Géométrie du problème

On se donne un repère cartésien (O, x, z) , on se place au point O et on examine un rayon allant d'un point $P_1 = (-X, -Z)$ à un point $P_2 = (X, Z)$ où X et Z sont donnés. On définit la distance P_1P_2 par d, et l'angle de P_1P_2 par rapport à l'horizontale par θ :

$$d = \sqrt{X^2 + Z^2} \quad (1)$$
$$\theta = \arctan(Z/X) \quad (2)$$

On peut donc considérer que d et θ sont les données de notre problème plutôt que X et Z. On munit la droite orientée P_1P_2 d'une abcisse σ, telle que $\sigma(O) = 0$. On a donc :

$$\sigma(P_1) = -d \quad (3)$$
$$\sigma(P_2) = d \quad (4)$$

Comme indiqué ci-dessus, on adopte une expression linéaire valable localement pour l'indice de réfraction :

$$n = n_0 - \alpha z \quad (5)$$

2 Principe général

Conformément à la théorie classique de la propagation de la lumière, le calcul du trajet du rayon lumineux entre P_1 et P_2 s'effectue en minimisant l'intégrale d'action suivante :

$$I = \int_{P_1}^{P_2} n[P(s)]ds \quad (6)$$

par rapport à des variations arbitrairement petites du trajet suivi. Dans l'équation précédente, s est l'abcisse curviligne le long d'une courbe arbitraire passant par P_1 et P_2, $P(s)$ est le point du rayon lumineux ayant pour abcisse curviligne s sur cette courbe, et $n[P(s)]$ est l'indice de réfraction en ce point. Physiquement, cette intégrale représente à un facteur près, le temps de parcours de la lumière entre P_1 et P_2 si on la contraignait à emprunter le trajet de cette courbe arbitraire. Ce temps de parcours est minimal sur le rayon lumineux (courbé) qui est effectivement emprunté dans la réalité par la lumière entre P_1 et P_2.
On note δ la déviation du rayon lumineux par rapport à la droite P_1P_2 dans la direction faisant un angle $\pi/2$ avec celle-ci. La trajectoire du rayon lumineux est alors entièrement déterminée par la connaissance de la fonction $\delta(\sigma)$ sur l'intervalle $\sigma \in [-d, d]$, et l'on a :

$$
\begin{aligned}
\delta(-d) &= 0 \qquad (7)\\
\delta(d) &= 0 \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Puisque nous considérons un trajet P_1P_2 arbitrairement petit, on développe la fonction $\delta(\sigma)$ en série de McLaurin autour de $\sigma = 0$, et on n'en retient que les termes dominants nécessaires au calcul. Ici, puisque $\delta(-d) = \delta(d) = 0$, on doit retenir les termes constants en σ et les termes quadratiques en σ. On a donc :

$$
\delta(\sigma) = h\left[1 - \left(\frac{\sigma}{d}\right)^2\right] \qquad (9)
$$

où h est l'inconnue de notre problème. Physiquement, h représente la déviation maximale du rayon lumineux par rapport à la ligne droite P_1P_2. La connaissance du rayon de courbure découle alors directement de celle de h.

3 Calcul de la déviation

L'équation de la droite P_1P_2 s'écrit :

$$
\begin{aligned}
x^*(\sigma) &= \left(\frac{X}{d}\right)\sigma \qquad (10)\\
z^*(\sigma) &= \left(\frac{Z}{d}\right)\sigma \qquad (11)
\end{aligned}
$$

L'équation du rayon lumineux est donnée par :

$$
\begin{aligned}
x(\sigma) &= x^*(\sigma) - \sin\theta\ \delta(\sigma) \qquad (12)\\
z(\sigma) &= z^*(\sigma) + \cos\theta\ \delta(\sigma) \qquad (13)
\end{aligned}
$$

L'abcisse curviligne le long du rayon lumineux s'écrit :

$$
ds^2 = d\sigma^2 + d\delta^2 = d\sigma^2 + \left(\frac{d\delta}{d\sigma}\right)^2 d\sigma^2 = \left[1 + \left(\frac{d\delta}{d\sigma}\right)^2\right] d\sigma^2 \qquad (14)
$$

et donc, au premier ordre :

$$
ds = \left(1 + \frac{2h^2\sigma^2}{d^4}\right) d\sigma \qquad (15)
$$

L'intégrale d'action s'écrit :

$$
I = \int_{P_1}^{P_2} n\ ds = \int_{-d}^{d} n[x(\sigma), z(\sigma)] \frac{ds}{d\sigma} d\sigma \qquad (16)
$$

$\Longrightarrow$

$$
I = \int_{-d}^{d} \left\{n_0 - \alpha\left[\left(\frac{Z}{d}\right)\sigma + h\cos\theta\left(1 - \frac{\sigma^2}{d^2}\right)\right]\right\} . \left(1 + \frac{2h^2\sigma^2}{d^4}\right) d\sigma \qquad (17)
$$

$\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
I \quad = \quad & \int_{-d}^{d} \left\{(n_0 - \alpha h\cos\theta) - \frac{\alpha Z}{d}\sigma + \sigma^2\left[\frac{\alpha h\cos\theta}{d^2} + \frac{2h^2}{d^4}(n_0 - \alpha h\cos\theta)\right]\right.\\
& \left. -\sigma^3\left(\frac{\alpha Z}{d}\frac{2h^2}{d^4}\right) + \left(\frac{\alpha h\cos\theta}{d^2}\frac{2h^2}{d^4}\right)\sigma^4\right\} d\sigma \qquad (18)
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
I \quad = \quad & (n_0 - \alpha h\cos\theta)\, 2d - \frac{\alpha Z}{d} d^2 + \left[\frac{\alpha h\cos\theta}{d^2} + \frac{2h^2}{d^4}\,(n_0 - \alpha h\cos\theta)\right] \frac{2d^3}{3} \\
& - \left(\frac{\alpha Z}{d}\frac{2h^2}{d^4}\right)\frac{d^4}{2} + \left(\frac{\alpha h\cos\theta}{d^2}\frac{2h^2}{d^4}\right)\frac{d^4}{2} \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Finalement, en regroupant en h et en éliminant les termes d'ordre supérieur :

$$I = (2n_0 d - \alpha Z d) + h(-2\alpha d\cos\theta + \frac{2}{3}\alpha d\cos\theta) + h^2\left(\frac{4n_0}{3d} - \frac{\alpha Z}{d}\right) + O(h^3) \qquad (20)$$

La minimisation de I par rapport aux variations de h s'ecrit :

$$\frac{dI}{dh} = 0 \qquad (21)$$

$\Longrightarrow$

$$-\left(\frac{4}{3}\alpha d\cos\theta\right) + 2h\left(\frac{4n_0}{3d} - \frac{\alpha Z}{d}\right) = 0 \qquad (22)$$

Pour des trajets P_1P_2 arbitrairement petits, le dernier terme en Z peut être négligé devant l'avant dernier, et la déviation s'écrit alors :

$$h = \frac{\alpha d^2}{2n_0}\cos\theta \qquad (23)$$

4 Rayon de courbure local

Soit ρ le rayon de courbure local du rayon lumineux. En assimilant l'arc de parabole à un arc de cercle, on a :

$$\rho^2 = (\rho - h)^2 + d^2 \qquad (24)$$

$\Longrightarrow$

$$\rho = \frac{h^2 + d^2}{2h} \approx \frac{d^2}{2h} \qquad (25)$$

Finalement, en remplaçant par l'expression trouvée ci-dessus pour h :

$$\rho \approx \frac{n_0}{\alpha\cos\theta} \qquad (26)$$

5 Commentaires et conclusions

On voit que si les deux points P_1 et P_2 sont situés l'un au dessus de l'autre, alors $\theta = \pi/2$ et le trajet du rayon lumineux entre P_1 et P_2 est exactement un segment de droite car $h = 0$ et $\rho = \infty$. Il n'y a alors aucune déviation du rayon lumineux par rapport au trajet direct.

Au contraire si les deux points P_1 et P_2 sont situés dans le même plan horizontal, alors $\theta = 0$; la déviation atteint alors la valeur $h = \alpha d^2/(2n_0)$ et le rayon de courbure passe par un minimum $\rho \approx n_0/\alpha$, c'est à dire que la courbure locale passe par un maximum.

Pour des rayons inclinés, θ prend des valeurs intermédiaires ; pour une même distance parcourue d, la déviation diminue et le rayon de courbure augmente continument lorsque θ augmente.

En un endroit donné, les rayons possédant le plus petit rayon de courbure sont donc ceux qui se propagent horizontalement.

En utilisant les valeurs typiquement observées sur terre pour α, on retrouve la formule dite "des gardiens de phare", qui stipule que le rayon de courbure des rayons lumineux horizontaux en mer est approximativement de 6 rayons terrestres. En effet, au sol on a $\alpha \approx 2.9\ \ 10^{-8}\ \mathrm{m}^{-1}$, et donc $\rho \approx 5.3 R_{\odot}$.

Ces conclusions s'appliquent en un point donné. Maintenant, il faut bien être conscient que plus un point est situé en altitude dans l'atmosphère, plus la valeur de α est faible en ce point, car la décroissance de la densité avec l'altitude est de plus en plus lente au fur et à mesure que l'on séléve dans l'atmosphère. Donc pour un point situé en altitude, et pour un même angle θ, le rayon de courbure des rayons lumineux sera plus grand que pour une point situé au niveau de la mer. C'est pour cette raison que l'on peut résumer tous les résultats de cette note par la conclusion suivante :

La courbure locale des rayons lumineux en un point donné est d'autant plus prononcée que le rayon est proche de l'horizontale et que l'altitude du point est petite. Le rayon de courbure minimal, qui est atteint au niveau de la mer pour des rayons horizontaux, est de l'ordre de 6 rayons terrestres.